IFAC-TSRR vol. 3 (2011) 93-97

Vademecum sulle equazioni differenziali
I

D. Mugnai([1])

([1]) IFAC-CNR, Via Madonna del Piano 10, 50019 Sesto Fiorentino (FI), Italy

 ISSN 2035-5831

1 - Introduzione

Questo breve documento nasce dall'esigenza di alcuni colleghi di avere a disposizione un testo che tratti delle equazioni differenziali in modo conciso e che rappresenti, pertanto, un utile strumento di lavoro per tutti coloro che devono poter risolvere le equazioni differenziali, anche senza conoscere le teorie matematiche sulle quali esse si basano.

Una equazione differenziale è una relazione tra una variabile, diciamo x, la funzione $f(x)$ e le sue derivate, che noi indicheremo con y', y'', ... y^n, dove $y' = dy/dx$, $y'' = d^2y/dx^2$, ... $y^n = d^n y/dx^n$.

L'equazione che deve essere risolta è pertanto del tipo

$$F(x, y, y', \ldots., y^n) = 0$$

e l'ordine di tale equazione è quello della derivata più elevata: una equazione in cui compare solo la derivata prima si dice equazione del primo ordine, una in cui compare la derivata seconda si dice equazione differenziale del secondo ordine, e così via.

Quando si dice di "integrare una equazione differenziale" si intende che si devono trovare, tramite un processo di integrazione, tutte le soluzioni $y = f(x)$ che soddisfano l'equazione in questione.

In quello che segue saranno esaminate le equazioni differenziali del primo ordine e i tipi più semplici di equazioni differenziali del secondo ordine. Anche se tali equazioni rappresentano un sottoinsieme di tutte le equazioni differenziali note, esse hanno però una grande importanza in quando sono soluzioni di molti problemi fisici.

Rimandiamo ad un secondo report per quanto riguarda le equazioni differenziali del secondo ordine di tipo generale.

2 - Equazioni del 1° ordine

2.1 - Equazioni alle “variabili separate”

Consideriamo il tipo più semplice di equazione differenziale, quello detto “alle variabile separate”, così definito perché queste equazioni possono sempre essere espresse come

$$f(x) = g(y)\, y' \tag{1}$$

dove $f(x)$ e $g(y)$ sono funzioni note della x e delle y, e $y(x)$ è l'incognita. Per risolvere l'equazione (1) è sufficiente separare la dipendenza da x da quella da y, cioè riscrivere la (1) come ($y' = dy/dx$)

$$f(x)\, dx = g(y)\, dy$$

e integrare.

Esempio - Trovare le soluzioni della seguente equazione differenziale

$$y' + y \sin x = 0$$

Soluzione.

$$\int \frac{dy}{dx} = -\int \sin x\, dx, \text{ che dà } \quad \ln|y| = \cos x + c, \text{ quindi } \quad y = \pm e^c e^{\cos x}.$$

Come si può vedere, la soluzione di una equazione differenziale del primo ordine dipende da una costante (c) e si può dimostrare che, in generale, la soluzione di una equazione differenziale di ordine n, dipende da n costanti. Il valore di queste costanti può essere determinato dalle condizioni iniziali (o condizioni al contorno) che dipendono dal tipo di problema fisico in considerazione, ma noi non ci addentreremo in questo argomento.

2.2 - Equazioni lineari

Le equazioni differenziali lineari sono caratterizzate dal fatto che la funzione incognita e la sua derivata prima compaiono alla prima potenza. In generale possono essere scritte come

$$m(x)y' + n(x)y = f(x) \tag{2}$$

dove $m(x)$ e $n(x)$ sono funzioni note di x.

Cominciamo con il considerare i casi più semplici.

1- Per $f(x) = 0$ ci si riconduce al caso già descritto nel paragrafo precedente e abbiamo quindi:

$$\int \frac{dy}{dx} = -\int \frac{n(x)}{m(x)}\, dx, \quad \textit{che dà} \quad \ln|x| = -\int \frac{n(x)}{m(x)}\, dx + c,$$

da cui

$$y = \pm C \exp\left(-\int \frac{n(x)}{m(x)}\, dx\right),$$

dove, per semplicità, abbiamo usato la notazione $C = e^c$.

2- Consideriamo il caso in cui tutti i coefficienti siano costanti, cioè:

$$ay' + by = h\,.$$

Anche in questo caso è possibile applicare il metodo delle separazione delle variabili e abbiamo:

$$a\frac{dy}{dx} = h - by, \qquad \text{cioè} \quad a\,dy = dx(h - by), \qquad \text{quindi} \int \frac{dy}{h - by} = \int \frac{dx}{a}, \ \text{che dà} \ -\frac{1}{b}\ln|h - by| = \frac{x}{a} + c$$

da cui

$$|h - by| = \exp\left(-\frac{bx}{a}\right)\, \exp(-bc)$$

ed infine

$$y = \frac{1}{b}\left[h - \exp\left(-\frac{bx}{a}\right)\exp(-bc)\right],$$

dove abbiamo supposto $h - by > 0$.

3- Passiamo adesso al caso più generale di Eq. (2), quello cioè in cui l'equazione differenziale si scrive come

$$m(x)y' + n(x)y = f(x).$$

Per risolvere la precedente equazione di usa il metodo della "variazione delle costanti", anche noto come metodo di Lagrange. L'applicazione di questo metodo richiede innanzi tutto di risolvere la stessa equazione senza secondo membro, risolvere quindi un'equazione del tipo

$$m(x)y' + n(x)y = 0$$

che, come abbiamo visto, ha per soluzione

$$y = Ce^{F(x)} \quad \text{con} \quad F(x) = -\int \frac{n(x)}{m(x)}\, dx\,.$$

La soluzione precedente deve essere considerata come una soluzione parziale: per ottenere la soluzione generale bisogna pensare che la quantità C non è una costante, ma, in realtà, una funzione di x.

A questo punto ottenere la soluzione generale è molto semplice: è sufficiente differenziare C e procedere alla separazione delle variabili. Due esempi chiariranno meglio il procedimento.

- ***Esempio 1*** – Sia

$$y' - \frac{y}{x} = x^2 \tag{3}$$

la nostra equazione differenziale. La soluzione senza il secondo membro è

$$y = C(x)x \tag{4}$$

dove abbiamo riportato la dipendenza di C da x, come precedentemente spiegato. A questo punto possiamo procedere direttamente con il processo di derivazione e abbiamo

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dC}{dx} + C$$

e, sostituendo in Eq. (3) otteniamo

$$x\frac{dC}{dx}+C-C=x^2, \text{ cioè } \frac{dC}{dx}=x, \quad \text{e quindi } C(x)=x^2+C'$$

dove C' è una costante che dipende dalle condizioni iniziali. A questo punto, sostituendo in (4) otteniamo la soluzione generale cercata:

$$y=x^3+C'x.$$

1. ***Esempio 2*** – Sia

$$y'\cos x+y\sin x=1 \tag{5}$$

l' equazione differenziale di cui cerchiamo la soluzione. La soluzione senza il secondo membro è

$$y=C(x)\cos x \tag{6}$$

e, derivando, abbiamo

$$\frac{dy}{dx}=\cos x\,\frac{dC}{dx}-C\sin x\,.$$

Sostituendo in (5) siamo in grado di ottenere la funzione $C(x)$, infatti

$$\left(\cos x\frac{dC}{dx}-C\sin x\right)\cos x+C\cos x\sin x=1, \quad \text{cioè } \frac{dC}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}, \quad \text{da cui } C(x)=\tan x+C'$$

ed infine, sostituendo in (6), otteniamo la soluzione cercata:

$$y=\sin x+C'\cos x\,.$$

3 - Equazioni del 2° ordine – *Alcuni casi semplici*

In questo paragrafo tratteremo di alcuni tipi di equazioni differenziali del secondo ordine, quelle che più frequentemente si incontrano relativamente a problemi fisici. Iniziamo con alcuni casi particolari, molto semplici.

a) Si cerca la soluzione di una equazione del tipo

$$y''=f(x). \quad \text{cioè } \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=f(x), \quad \text{o anche } \left(\frac{dy}{dx}\right)=f(x)dx.$$

Passando alle integrazioni abbiamo $\frac{dy}{dx}=F(x)+C$, dove $F(x)=\int f(x)dx$. La soluzione cercata è quindi, utilizzando una integrazione successiva,

$$y=\int F(x)dx+Cx+C'.$$

È interessante notare che questo tipo di procedimento è generale in quanto può essere applicato anche a equazioni di ordine superiore.

Esempio **–** Si trovi la soluzione dell'equazione differenziale del secondo ordine

$$y''-4x=0$$

Soluzione. L'equazione precedente può essere scritta come

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=4x \quad \text{quindi} \quad \int d\left(\frac{dy}{dx}\right)=\int 4x\,dx+c \ \text{ cioè } \ dy=2x^2dx+c\,dx$$

da cui si può infine ricavare la soluzione:

$$y=\frac{2}{3}x^3+cx+c'$$

b) Si cerca la soluzione di una equazione del tipo

$$y''=f(y), \quad \text{cioè } \frac{d^2y}{dx^2}=f(y)\,.$$

Per la trovare la soluzione è sufficiente moltiplicare ambo i membri per $y'dx$ e così otteniamo

$y'\int y''dx = \int f(y)dy,$ da cui otteniamo $(y')^2 = F(y) + K,$ dove $F(y) = \int f(y)dy$.

Ci siamo quindi ricondotti all'equazione di primo grado $\pm\frac{dy}{\sqrt{F(y)+K}} = dx$ che può essere facilmente risolta.

Esempio – Si trovi la soluzione della seguente equazione

$$y'' + 2a^2y = 0 \qquad \text{dove } a = \text{cost.}$$

Soluzione. Abbiamo

$$\frac{dy}{dx}\int\frac{d^2y}{dx^2}dx = -2a^2\int ydy$$

da cui

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -a^2y^2 + c^2 \qquad \text{con } c^2 = \text{cost.}$$

dove abbiamo posto la costante al quadrato per comodità di analisi, infatti abbiamo

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{c^2 - a^2y^2} \;\rightarrow\; \pm\int\frac{dy}{\sqrt{c^2 - a^2y^2}} = x + C \;\rightarrow\; \pm\frac{1}{a}\int\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2y^2}{c^2}}}d\left(\frac{ay}{c}\right) = x + C$$

ed infine:

$$\pm\frac{1}{a}\arcsin\left(\frac{ay}{c}\right) = x + C \;\rightarrow\; y = \mp\frac{c}{a}\sin(ax + aC)$$

c) Si cerca la soluzione di una equazione del tipo

$$y'' = f(x, y') .$$

In questo caso è conveniente porre $y' = u(x)$, in modo che $y'' = u'(x)$. In questo modo l'equazione differenziale di partenza si riduce ad una equazione del primo ordine di cui si può trovare la soluzione $u(x)$, dalla cui integrazione si ricava poi $y(x)$.

Esempio - Si trovi la soluzione dell'equazione

$$(1 + x^2)y'' + xy' = ax$$

Soluzione.

$$(1 + x^2)\frac{du}{dx} + xu = ax$$

che non è altro che una equazione del primo ordine del tipo (2), la cui soluzione fornisce $u(x)$: separando le variabile, con una ulteriore integrazione si ottiene poi $y(x)$.

d) Si cerca la soluzione di una equazione del tipo

$$y'' = f(y, y'), \text{ cioè } \frac{d^2y}{dx^2} = f(y, y') .$$

Anche in questo caso è conveniente porre $y' = u(x)$, in modo che $y'' = u'(x)$, con l'accortezza di porre $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}$. Così, come nel caso precedente, l'equazione differenziale di partenza si riduce ad una equazione del primo ordine di cui si può trovare la soluzione $u(x)$, dalla cui integrazione si ricava poi $y(x)$.

Esempio - Si trovi la soluzione dell'equazione

$$y\,y'' = 1 + y'^2$$

Soluzione.

$$y\,u\frac{du}{dy} = 1 + u^2 \;\rightarrow\; \int\frac{u}{1 + u^2}\,du = \int\frac{dy}{y}$$

Come prima, si trova la soluzione per $u(x)$ e poi, con una ulteriore integrazione, $y(x)$.